HOJA PRÁCTICA 2: SOLUCIONES

1.- Efectúa la siguiente operación con polinomios y expresa el resultado en la forma más sencilla.

(x+1)(x^2-4) + (2-x)^2- (3-5x)(3+5x) = x^3+27x^2-8x-9

[(2x+1)^2 - (x-3)^2] ^{2} $=9x^4+60x^3+52x^2-160x+64$

(x^4-1) : (x+2) = $\begin{cases} Cociente: x^3-2x^2+4x-8 \\ \text{Resto}: 15 \end{cases}$

2.- Calcula y expresa en la forma más simplificada posible.

$\frac{x-2}{x-1}-\frac{x+1}{2}=\frac{x^2-2x+3}{2(1-x)}$ $\qquad$ $\frac{x^2-2x}{x^2-4}:\frac{x^3}{x^2+x-2}=\frac{x-1}{x^2}$

3.- Encontrar las raíces del polinomio: P(x)=x^5-6x^4+10x^3-11x+6
Las raíces son: -1; 1 (doble); 2; 3

4.- Sean los polinomios:

$P(x)=3x^5-4x^4-3x^2+2$

$Q(x)=x^3-4x-2$

Realizar las siguientes operaciones:

P+Q= $3x^5-4x^4+x^3-3x^2-4x$

P-Q= $3x^5-4x^4-x^3-3x^2+4x+4$

PQ= $3x^8-4x^7-12x^6+7x^5+8x^4+14x^3+6x^2-8x-4$

P:Q= $\begin{cases} Cociente: 3x^2-4x+12 \\ \text{Resto}: -13x^2+40x+26 \end{cases}$

5.- Teorema del resto, enunciar y demostrar.

Sea $P_n(x)$ un polinomio en x de grado n, y sea $x_0 \in R$, una raíz de $P_n(x)$, es decir $P_n(x_0)=0$, entonces el polinomio $P_n(x)$ es divisible entre $(x-x_0)$.

Demostración: Sabemos que al hacer la división $P_n(x):(x-x_0)$, obtenemos un polinomio cociente $C(x)$ y un polinomio resto R de grado inferior al polinomio divisor, es decir de grado cero y por lo tanto un número real. La prueba de la división asegura que $P_n(x)=C(x)(x-x_0)+R$, sustituyendo x por x_0, tenemos:

$P_n(x_0)=C(x)(x_0-x_0)+R=C(x)\cdot 0+R$ y como por hipótesis $P_n(x_0)=0$, resulta que $R=0$

6.- Factorizar el polinomio $P(x)=x^5+2x^4-6x^3-8x^2+5x+6$

$P(x)=(x-1)(x-2)(x+3)(x+1)^2$

7.- Encontrar las raíces del polinomio : $P(x)=(x^2-2x)(x-3)(x+5)$

$x=0;\ x=2;\ x=3;\ x=-5$

8.- Sean los siguientes polinomios:

$P_1 = x^4 - 3x^2 + x - 4$ $\quad P_2 = x^2 + x - 1$ $\quad P_3 = x - 1$ $\quad P_4 = xy^2 - xy + 3x - 2y + 1$

Efectúa las operaciones siguientes.

a) $P_1 : P_2 = \begin{cases} Cociente: x^2 - x - 1 \\ \text{Resto}: x - 5 \end{cases}$

b) $P_1 + P_2 = x^4 - 2x^2 + 2x - 5$

c) $P_4 \cdot P_3 = x^2y^2 - x^2y + 3x^2 - xy^2 - xy - 2x + 2y - 1$

d) $P_2 : P_3 = \begin{cases} Cociente: x + 2 \\ \text{Resto}: 1 \end{cases}$

e) $P_1 - P_2 = x^4 - 4x^2 - 3$

9.- Factoriza el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.

Si $Q(x) = (x-1)^3(x+2)^5(x-7)$, encuentra el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

Efectúa la operación $\dfrac{1}{P(x)} + \dfrac{1}{Q(x)}$

$P(x) = (x-1)(x+2)(x-2)(x+3)$

$MCD(P(x), Q(x)) = (x-1)(x+2)$

$mcm(P(x), Q(x)) = (x-1)^3(x+2)^5(x-2)(x+3)(x-7)$

$$\frac{1}{P(x)} + \frac{1}{Q(x)} = \frac{x^7 - x^6 - 33x^5 - 71x^4 + 32x^3 + 169x^2 + 17x - 118}{(x-1)^3(x+2)^5(x-2)(x+3)(x-7)}$$

10.- a) Factoriza el polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

b) Sea $Q(x) = (x+2)^2(x-1)(x+5)$. Encuentra los polinomios MCD y mcm de P(x) y Q(x).

$P(x) = (x+2)(x-3)(x-1)^2$

$MCD(P(x), Q(x)) = (x-1)(x+2)$

$mcm(P(x), Q(x)) = (x-1)^2(x+2)^2(x+5)(x-3)$

11.- Utilizando la expresión del binomio de Newton, calcula $(2x+1)^5$.

$(2x+1)^5 = 32x^5 + 80x^4 + 80x + 40x^2 + 10x + 1$

12.- Obtén y simplifica mediante el binomio de Newton $(2x-3)^4 =$

$(2x-3)^4 = 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$

13.- Obtén el valor de m para que el polinomio $P(x)=3x^5+2x^4+mx^3-2x^2-8$ sea divisible entre $x-2$.
Una vez que hallas obtenido m, encuentra el resto que se genera al dividir P(x) entre $(x-1)$.
Según el teorema del resto $P(x)$ sea divisible entre $x-2$ si $P(2)=0$, es decir si $3\cdot 2^5+2\cdot 2^4+m\cdot 2^3-2\cdot 2^2-8=0 \Rightarrow m=-14$
Si $m=-14 \Rightarrow$ $P(x)=3x^5+2x^4-14x^3-2x^2-8$, y el resto resultado de dividir entre $(x-1)$ será $P(1)=-19$

14.- Sean los polinomios $Q(x)=x^5-8x^4+13x^3+5x^2-6x+1$ y $H(x)=x^2-3x+1$.
Efectúa las siguientes operaciones:

$$\frac{Q(x)}{H(x)}=\begin{cases} Cociente: x^3-5x^2-3x+1 \\ \text{Resto}: 0 \end{cases} \qquad Q(x)\cdot H(x)=x^7-11x^6+38x^5-42x^4-8x^3+24x^2-9x+1$$

$$Q(x)+H(x)=x^5-8x^4+13x^3+6x^2-9x+2 \qquad Q(x)-H(x)=x^5-8x^4+13x^3+4x^2-3x$$

15.- Factoriza el polinomio $P(x)=x^4-8x^3+14x^2+8x-15$

$$P(x)=x^4-8x^3+14x^2+8x-15=(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$$

16.- Sean los polinomios:

$$A(x)=x^3-2x^2+x-5 \qquad B(x)=x^3+4x^2-3x+2 \qquad C(x)=x^2+x+\frac{3}{2}$$

Calcular:

a) $A(x)+\left(B(x)-C(x)\right)=2x^3-2x-\frac{9}{2}$

b) $\frac{1}{2}A(x)+3B(x)-C(x)=\frac{7x^3}{2}+9x^2-\frac{17x}{2}+2$

c) $A(x)-\left(-B(x)-C(x)\right)=2x^3+4x^2-2x-\frac{3}{2}$

d) $A(x)+\frac{1}{4}\left(B(x)+C(x)\right)=\frac{5x^3}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}-\frac{33}{8}$

e) $A(x)\cdot B(x)=x^6+2x^5-10x^4+7x^3-27x^2+17x-10$

f) $B(x)-C^2(x)=-4x^4+x^3-2x^2-3x-\frac{1}{4}$

17.- Calcular:

a) $(x+1)(x-4)+(2-x)^2+(3-5x)(3+5x)=-23x^2-7x+9$

b) $\left(x^3-2\right)^3+(2x-1)(2x+1)-x^4(x-1)^2=x^9-7x^6+2x^5-x^4+12x^3+4x^2-9$

c) $(2-3x)(2+3x)+4(x-2)^2-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=-6x^2-\frac{35x}{2}+\frac{311}{16}$

18.- Sean $P(x)=5x^3-3x^2+2x-4$, $Q(x)=x^2-2$ y $H(x)=x+5$

Calcular:

a) $[P(x)+Q(x)]\cdot H(x)=5x^4+23x^3-8x^2+4x-30$

b) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}Cociente: 5x-3\\ \text{Resto}: 12x-10\end{cases}$

c) $\dfrac{P(x)}{H(x)}=\begin{cases}Cociente: 5x^2-28x+142\\ \text{Resto}: -714\end{cases}$

19.- Realizar las siguientes divisiones mediante el método de Ruffini.

a) $(x^4-2x^3+4x^2+2x-1):(x-1)=\begin{cases}Cociente: x^3-x^2+3x+5\\ \text{Resto}: 4\end{cases}$

b) $(x^3-2x^2+6x+7):(x-2)=\begin{cases}Cociente: x^2+6\\ \text{Resto}: 19\end{cases}$

c) $(x^3-2x^2+6x+7):(x+2)=\begin{cases}Cociente: x^2-4x+14\\ \text{Resto}: -21\end{cases}$

d) $(x^4-1):(x-15)=\begin{cases}Cociente: x^3+15x^2+225x+3375\\ \text{Resto}: 50624\end{cases}$

e) $(3x^2-x+2):\left(x-\dfrac{2}{3}\right)=\begin{cases}Cociente: 3x+1\\ \text{Resto}: 8\end{cases}$

20.- Hallar el valor de a para que el polinomio $P(x)=x^4-ax^3+3x^2-x+1$ sea divisible entre $(x+2)$.

Por lo tanto que la división tenga resto 0, es decir:

$$P(-2)=0\Rightarrow(-2)^4-a(-2)^3+3(-2)^2-(-2)+1=0\Rightarrow a=-\frac{9}{8}$$

21.- Dado el polinomio $P(x)=x^3-5x^2+ax+b$, hallar a y b sabiendo que tanto al dividirlo entre $(x-2)$ como $(x+1)$ da de resto -11.

Por lo tanto que ambas divisiones tengan resto -11, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}P(2)=-11\Rightarrow 2^3-5(2)^2+2a+b=-11\\ P(-1)=-11\Rightarrow(-1)^3-5(-1)^2-a+b=-11\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}$$

22.- Halla el resto de las siguientes divisiones.

a) $(x^{1237}+1):(x+1)$ El resto coincide con $P(-1)=(-1)^{1237}+1=0$

b) $(x^{1237}-1):(x+1)$ El resto coincide con $P(-1)=(-1)^{1237}-1=-2$

23.- Descomponer los siguientes polinomios:

a) $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)$

b) $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$

c) $3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

d) $x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2$

e) $(2x-1)^2-(3x+2)^2=-(x+3)(5x+1)$

f) $x^2-5x=x(x-5)$

g) $x^4-\frac{5}{2}x^3+\frac{5}{2}x-1=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2)(2x-1)$

h) $25x^3-16x=x(5x+4)(5x-4)$

24.- Simplificar las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\frac{x^2-16}{x^2-8x+16}=\frac{x+4}{x-4}$ b) $\frac{x+1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{x+1}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{6+2x}=\frac{x+3}{2}$

25.- Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\frac{3}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}=\frac{5x+3}{(x+1)(x-1)}$

b) $\frac{x^2+2x}{x^2-4}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{x-2}$

c) $\frac{x^2-4}{x-1}\cdot\frac{x^3-3x`+2}{x^4+4x+4}=\frac{(x^2-4)(x^2+x-2)}{x^4+4x+4}$

d) $\frac{x^2-2x}{x^2-4}:\frac{x^3}{x^2+x-2}=\frac{x-1}{x^2}$

e) $\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{x-1}{x(x+1)}$

f) $\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x^2-3x+2}=0$

g) $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x(x-1)}{x-2}-\frac{x+1}{2}=\frac{x^3-5x+6}{2(x-1)(x-2)}$

h) $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x^2}+1=\frac{2x^4+3x^2+3}{(x+1)(1-x)(x^2+1)}$

i) $\frac{x^2-x-2}{x+3}\cdot\frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3}\cdot\frac{(x-2)^2}{x^2-1}=1$